

6 Tilastot ja todennäköisyyslaskenta

1

- a) Kuvaajasta: Vajaa 25 000, Taulukosta: 24 832
- b) Muutos kuvaajasta: Kasvua noin 2 500 eli noin 51 %, Muutos taulukosta: 12 719 eli 51,2 %
- c) Kuvaajan tulkinnessa arviointi aiheuttaa epätarkkuutta, taulukosta tarkat arvot.

2

- a) 6 %
- b) noin 1.6 % eli noin 88 200 miestä
- c) Prosenttiluvun tulkinnessa 1,55 – 1,75 % eli todellinen arvo välillä 85 453 – 96 480.

3

- a) noin 210 kpl
- b) $360 - 295 = 65$ kpl
- c) arvio: $360 + 210 + 295 + 120 + 190 + 170 + 25 = 1\,370$

4

- a) miehet: 15 % ja naiset: 13 %
- b) vuonna 2016
- c) $28 \% - 15 \% = 13 \%$ -yksikköä
- d) $(19 \% - 13 \%) / 19 \% = 32 \%$
- e) Pystyakselin ala- ja ylärajan muuttaminen saa pudotuksen näyttämään suuremmalta.

5

- a) 9 %
- b) $100 \% - 47 \% - 33 \% = 20 \%$
- c) $(47 \% - 33 \%) / 33 \% = 42 \%$ enemmän

6

- a) $67 - 42 = 25$ TWh
- b) 2003, noin 10 TWh
- c) Vuonna 2004, noin 82 TWh
- d) Tuonti ulkomailta on kulutuksen ja tuotannon ero. Pienimmillään vuonna 2004, noin $87 - 82 = 5$ TWh

7

- a) n. 620 000
- b) 2006–2007
- c) Kasvua noin $2\,700\,000 - 1\,880\,000 = 820\,000$ asuntokuntaa

8

- a) $25\,000 + 55\,000 = 80\,000$ tuhatta
- b) $270\,000 - 195\,000 = 75\,000$
- c) Miesvaltaisin työ on Rakennus-, korjaus- ja valmistustyöntekijät ja naisvaltaisia ovat palvelu- ja myyntityö sekä toimisto- ja asiakaspalvelutyö.

9

- a) noin 15 500 €
- b) 2006
- c) vuosina 2012 ja 2013, vuosimuutos-viiva on alle 0 %.
- d) Vuosituhannen alusta velan määrä on miltei 2-kertaistunut, mutta kasvun on hidastunut viime vuosina.

10

- a) 360 000 kpl
- b) 7 000 kpl
- c) Vuosittainen viimeisellä neljänneksellä. Yritysten vuosikierto on tyypillisesti kalenterivuosi ja yritystoiminta päättyessään tapahtuu on tällöin vuoden lopussa.

11

- a) Kaupan asiakkaat
- b) Asiakas
- c) Otanta, ei saada kaikkien asiakkaiden mielipidettä varmuudella
- d) Sukupuoli, ikä, tyytyväisyys valikoimaan ja asiakaspalvelun laatu, ID on vastaajan järjestysnumero
- e) Tyytyväisyys valikoimaan ja asiakaspalvelun laatu
- f) Sukupuoli ja ikä
- g) Muuttujien vastaukset jakaumia

12

Kvalitatiiviset:

syntymäkuukausi(tausta)

kuukausipalkka(tausta)

pituus(tausta)

viikoittaiset liikuntakerrat(tausta)(riippuen tutkimuksesta myös tutkimusmuuttuja)

asuntolainan määrä(tausta)(riippuen tutkimuksesta myös tutkimusmuuttuja)

hotelliöiden lukumäärä(tutkimus)

kengän koko(tausta)

kiihtyvyys 0-100 km/h(tutkimus)

Kvantitatiiviset:

tyytyväisyys valikoimaan(tutkimus)

puhelinnumero(tausta)

postitoimipaikka(tausta)

ihonväri(tausta)

lempiväri(tausta)(riippuen tutkimuksesta myös tutkimusmuuttuja)

13

a) $\frac{2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 2 + 1 + 5 + 4}{9} = \frac{29}{9} = 3,2$

b) Keskiarvoon neljä summan on oltava vähintään $4 \cdot 9 = 36$ eli arvosanoja on korotettava vähintään 7:n arvosanan verran.

14

Arvosana	Lukumäärä	Tulo
1	3	$1 \cdot 3 = 3$
2	9	$2 \cdot 9 = 18$
3	7	$3 \cdot 7 = 21$
4	4	$4 \cdot 4 = 16$
5	2	$5 \cdot 2 = 10$
Yhteensä	25	68

$$\bar{x} = \frac{68}{25} = 2,72$$

15

Opinnon laajuus	Arvosana	Tulo
2 osp	4	$2 \cdot 4 = 8$
5 osp	5	$5 \cdot 5 = 25$
5 osp	2	$5 \cdot 2 = 10$
9 osp	3	$9 \cdot 3 = 27$
Yhteensä		

$$\bar{x} = \frac{70}{21} = 3,33$$

16

C on oikein.

17

- a) Mediaani on 5 ja moodia ei ole.
b) Mediaani on 1 ja moodi on 1.
c) Mediaani on keskikokoinen ympyrä ja moodi pieni ympyrä.
d) Mediaani on iso omega ja moodi pieni omega.
e) Mediaani on $\frac{1000 + 10\,000}{2} = 5\,500$ ja moodia ei ole.

18

- a) Mediaani on melko huono ja moodi hyvä.
b) Mediaani on melko hyvä ja moodi hyvä.

19

Moodi: Tuntipalkka 15 €/h on yleisin, mediaani 17 €/h on suuruusjärjestyksessä keskimäinen ja kaikkien tuntipalkkojen keskiarvo on 20 €/h. Yli 60 €/h tuntipalkkojakin on melko paljon, jotka myös nostavat keskiarvoa.

20

Tyytyväisyys valikoimaan	Lkm	%-osuus
Huono	25	7 %
Melko huono	102	30 %
Ei hyvä eikä huono	72	21 %
Melko hyvä	129	37 %
Hyvä	17	5 %
Yhteensä	345	100 %

21

- a) 5
- b) 345
- c) 11
- d) 40 %
- e) 48 %
- f) $345 - 334 = 11$

22

Ensimmäinen ei ole oikein, koska viimeisen luokan pituus 10. Luokkaväli 20.

Lisäksi suurin arvo 101 ei mahdu suurimpaan luokkaan.

Toinen on oikein! Tasaväliset luokat ja kaikki arvot mahtuvat luokkiin.

Kolmas väärin, koska viimeisen luokan pituus 31. Luokkaväli muissa 20.

Neljäs oikein luokkavälillä 25.

23

Ensimmäisen väärin, koska luokat limittyvät. Esimerkiksi arvo 1000 menee kahteen luokkaan.

Toinen väärin, koska luokkavälinä käytetty 251.

Kolmas oikein!

Neljäs oikein, jos muuttujan arvojen tarkkuus kokonaiset kymmenet.

24

Luokkaväli $\frac{47}{6} = 7,8$ eli 8 cm

145	–	152
153	–	160
161	–	168
169	–	176
177	–	184
185	–	192

25

- a) summat laskettu sarakkeittain, jolloin saadaan vastausten jakautuminen sukupuolittain ja kokonaisuutena
b) summat laskettu riveittäin, jolloin saadaan yksittäisten muuttujan arvojen vastausten jakautuminen sukupuolittain
c) summat laskettu kokonaissummasta, jolloin saadaan vastausten kokonaisosuuksien jakautuminen sukupuolittain

27

a) $P(\text{"herttaässä"}) = \frac{1}{52} \approx 0,019 = 1,9 \%$

b) $P(\text{"ässä"}) = \frac{4}{52} \approx 0,077 = 7,7 \%$

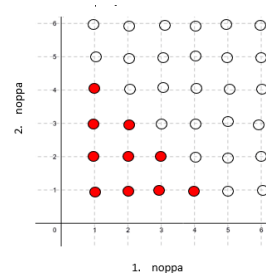
28

Vaihtoehtoja on $6 \cdot 6 = 36$

Suotuisat vaihtoehdot on merkitty kuvaan punaisella, niitä on 10.

Todennäköisyys:

$P(\text{"summa alle 6"}) = \frac{10}{36} \approx 0,2777... = 28 \%$



29

Vaihtoehtoja on $3 \cdot 10 \cdot 4 = 120$

30

Vaihtoehtoja on $10 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 5 = 3\,000$

Jos kaikki vaihtoehdot todellakin olisivat yhtä todennäköisiä,

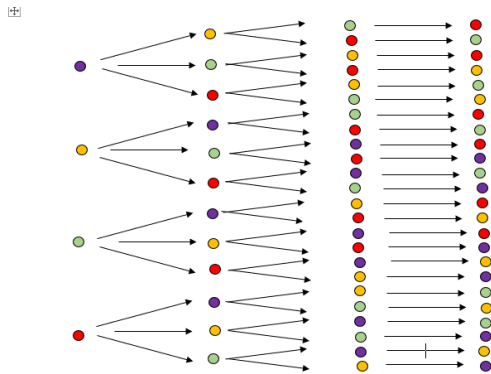
yhden tietyn yhdistelmän todennäköisyys olisi $\frac{1}{3\,000} = 0,000333... \approx 0,03\%$

(Tosielämässä tietenkin jotkut kengänkoot ovat muita yleisempiä ja asiakkaat luultavasti suosivat joitakin värejä yms. enemmän kuin toisia.)

31

Ratkaisu piirtämällä:

Merkitään kutakin neljää eri ihmistä erivärisellä pallolla. Näin saadaan seuraavat jonovaihtoehdot:



Piirroksesta nähdään, että erilaisia vaihtoehtoja on 24.

Ratkaisu laskemalla:

Jonon ensimmäiseksi ihmiseksi on 4 vaihtoehtoa. Kun ensimmäinen on valittu, seuraavaksi henkilöksi on 3 vaihtoehtoa. Kun jonon toinen ihminen on valittu, kolmanneksi on jäljellä 2 vaihtoehtoa. Kun kolme ensimmäistä henkilöä on valittu, jäljellä on enää 1 vaihtoehto viimeiseksi henkilöksi. Yhdistelmien määrä on siis tuloperiaatteen mukaan:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

(Lisätietoa:

Tuloa $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ voidaan kutsua neljän kertomaksi ja merkitä "4!" Funktiolaskimista ja tietokoneiden sekä hakukoneiden laskimista löytyy näppäin **n!** tai **xl**, jonka avulla voidaan suoraan laskea $4! = 24$.)

32

Numeroista 1 – 20 ovat neljällä jaollisia seuraavat: 4, 8, 12, 16 ja 20. Niitä on siis 5 kpl. Todennäköisyys saada

neljällä jaollinen numero on siis $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Jos voitat, jätät voitolle voittosumman miinus pelin hinnan eli $10 \text{ €} - 1 \text{ €} = 9 \text{ €}$

Voiton odotusarvo = voiton todennäköisyys · voitolle jääty summa – häviön todennäköisyys · hävitty summa

$$= \frac{1}{4} \cdot 9 \text{ €} - \frac{3}{4} \cdot 1 \text{ €} = 2,25 \text{ €} - 0,75 \text{ €} = 1,50 \text{ €}$$

Huom.! Sinun kannattaa pelata peliä, koska voiton odotusarvo on positiivinen. Tällaisen pelin järjestäminen taas ei ole kannattavaa, koska peli tuottaa odotusarvoisesti tappiota järjestäjälle!

33

Todennäköisyys saada silmäluku 6 on $\frac{1}{6}$.

Voiton odotusarvo = voiton todennäköisyys · voitolle jääty summa – häviön todennäköisyys · hävitty summa =

$$\frac{1}{8} \cdot 8 \text{ €} - \frac{5}{6} \cdot 2 \text{ €} = 1,33 \text{ €} - 1,66 \text{ €} = -0,33 \text{ €}$$

Huom.! Tällaisen pelin järjestäminen on kannattavaa, koska odotusarvoisesti pelaaja jää tappiolle ja pelin järjestäjä siis voitolle.

34

Ei mallivastausta, koska tulokset vaihtelevat.

35

a) Heinäkuussa on yhteensä 31 päivää.

Sadepäivän tilastollinen todennäköisyys on siis $\frac{14}{31} \approx 0,45 = 45 \%$

Vastaus: Ei kannata.

b) Voiton odotusarvo = voiton todennäköisyys · voitolle jääty summa – häviön todennäköisyys · hävitty summa

Emman todennäköisyys voittaa on a)-kohdan mukaan n. 45 % eli todennäköisyys hävitä on n. 55 %.

$$0,45 \cdot 5 \text{ €} - 0,55 \cdot 5 \text{ €} = 2,25 \text{ €} - 2,75 \text{ €} = -0,50 \text{ €}$$

36

ÖPS:in voiton todennäköisyys on 6 % eli todennäköisyys, että ÖPS ei voita, on 94 %.

Jos ÖPS voittaa, Ville jää vedosta voitolle $125 \text{ €} - 10 \text{ €} = 115 \text{ €}$.

Voiton odotusarvo = voiton todennäköisyys · voitolle jääty summa – häviön todennäköisyys · hävitty summa
 $= 0,06 \cdot 115 \text{ €} - 0,94 \cdot 10 \text{ €} = 6,90 \text{ €} - 9,40 \text{ €} = -2,50 \text{ €}$

37

Voiton odotusarvo on nolla, jos eloon jäämisen todennäköisyys · vakuutusmaksu x - kuolemisen todennäköisyys · vakuutusyhtiön tappio kuoleman sattuessa = 0.

$$\frac{920}{970}x - \frac{70}{990}(100\,000 - x) = 0$$

$$0,929292... x - 0,070707... \cdot (100\,000 - x) = 0$$

$$0,929292... x - 7\,070,71 + 0,070707 x = 0$$

$$0,929292... x + 0,070707... x = 7\,070,71$$

$$x \approx 7\,071 \text{ €}$$

Vastaus: Vakuutusmaksun on oltava suurempi kuin 7 071 €.

Huom.! Jos vertaat tilannetta esimerkkiin 6.17, niin tässä täysin kuvitteellisessa tilastossa kuoleman todennäköisyys 20-vuotiaasta 40-vuotiaaksi oli 1 % ja 40-vuotiaasta 60-vuotiaaksi noin 7 %. Kuoleman todennäköisyyden kasvaessa kasvaa vakuutusmaksukin. Henkivakuutus on sitä kalliimpi, mitä iäkkäämpi vakuutettu on.

38

Tiedonhakua ja keskustellen opiskelijoiden kanssa.

39

Tiedonhakua ja keskustellen opiskelijoiden kanssa.

40

a) Yrityksen työntekijät

b) Kokonaistutkimus

c) Työntekijä

d) Ikä, sukupuoli, asema, koulutus, palkka, perheen koko yms.

e) Tyytyväisyys palkkaan, työoloihin, ergonomiaan, esimiestyöhön, ilmapiiriin yms.

41

- a) Suomalaiset äänioikeutetut
- b) Otanta
- c) Yksi vastaaja
- d) Ehdokkaiden numerot tai nimet

42

- a) Sukupuoli, siviilisääty, koulutustaso, kotikunta, ammatti ja mielipide tuotteesta
- b) Ikä, päivittäinen työaika ja kuukausitulot
- c) Taustamuuttujat kertovat vastaajasta: sukupuoli, siviilisääty, ikä, koulutustaso, päivittäinen työaika, kotikunta, ammatti ja kuukausitulot.
- d) Tutkimusmuuttujat vastaavat varsinaiseen tutkimuksen aiheeseen eli mielipide tuotteesta.

43

Ottelu	F	F-%
voitto	6	46 %
tasapeli	4	31 %
tappio	3	23 %
Yhteensä	13	100 %

44

- a) 154 kpl
- b) 88 kpl
- c) 30 %
- d) 45 %

45

- a)

Useimmiten asioimasi pt- kauppa	F	F-%
Kyllä	16	80 %
Ei	4	20 %
Yhteensä	20	100 %

b)

Asiakaspalvelu	F	F-%
Hyvä	6	30 %
Melko hyvä	4	20 %
Ei hyvä eikä huono	3	15 %
Melko huono	1	5 %
Huono	6	30 %
Yhteensä	20	100 %

Hintataso	F	F-%
Hyvä	1	5 %
Melko hyvä	4	20 %
Ei hyvä eikä huono	5	25 %
Melko huono	9	45 %
Huono	1	5 %
Yhteensä	20	100 %

c) 1 sarake muuttujan arvot, 2. sarake muuttujien frekvenssit ja 3. sarake muuttujien frekvenssien %-osuudet

46

Oikeat vastaukset opiskelijoilta

47

a) keskiarvo = 9,14; moodi = 12 ja mediaani = 9

b) keskiarvo = 9,6; moodi = 11 ja mediaani = 10,5 (kahden keskimmäisen keskiarvo)

48.

a) 0 – 13

b)

Poissaolot	<i>F</i>	<i>F</i> -%
0	4	12 %
1	3	9 %
2	3	9 %
3	4	12 %
4	4	12 %
5	3	9 %
6	2	6 %
7	4	12 %
8	2	6 %
9	1	3 %
10	2	6 %
11	0	0 %
12	1	3 %
13	1	3 %
Yhteensä	34	100 %

c)

Poissaolot	<i>F</i>	<i>F</i> -%
0–1	7	21 %
2–3	7	21 %
4–5	7	21 %
6–7	6	18 %
8–9	3	9 %
10–11	2	6 %
12–13	2	6 %
Yhteensä	34	100 %

d)

Poissaolot	<i>F</i>	<i>F</i> -%
0–2	10	29 %
3–5	11	32 %
6–8	8	24 %
9–11	3	9 %
12–14	2	6 %
Yhteensä	34	100 %

e)

Poissaolot	<i>F</i>	<i>F</i> -%
0–3	14	41 %
4–7	13	38 %
8–11	5	15 %
12–15	2	6 %
Yhteensä	34	100 %

f) Luokittelussa katoaa aina tietoa. Tarkkoja määriä ei näe luokitellusta aineistosta. Kohdassa d luokka 3–5 suurin osuus, kun taas kohdassa e ensimmäisen luokka 0–3 selkeästi suurin.

49

a) $\frac{12 + 15 + 8 + 20 + 18 + 9}{6} = 13,66$

b) $\frac{50 + 55 + 49 + 35 + 30 + 80}{6} = 49,83 \text{ €}$

c) Toyota 1

d) Autojen keskimääräinen tuotto:

$$\frac{12 \cdot 50 + 15 \cdot 55 + 8 \cdot 49 + 20 \cdot 35 + 18 \cdot 30 + 9 \cdot 80}{6} = 629,50 \text{ €/kk}$$

50

Pituus	<i>F</i>	<i>F</i> -%
150 – 159	8	29 %
160 – 169	7	25 %
170 – 179	6	21 %
180 – 189	7	25 %
Yhteensä	28	100 %

51

a) havaintoarvoja 82 kpl eli parillinen määrä. mediaani kahden kesimmäisen keskiarvo eli suuruusjärjestyksessä

40. ja 41. keskiarvo : $\frac{4 + 4}{2} = 4$

b) 4

c) $\frac{5 \cdot 15 + 4 \cdot 28 + 3 \cdot 19 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 2}{82} = 3,34$

52

Silmäluvut 1 ja 2 ovat suotuisia vaihtoehtoja. Kaikkiaan vaihtoehtoja on 6.

$$\text{Tapahtuman todennäköisyys } P = \frac{\text{suotuisten tapausten määrä}}{\text{kaikkien alkeistapausten määrä}}$$

$$P(\text{"silmäluku max 2"}) = \frac{2}{6} = 0,333... \approx 33 \%$$

53

Vaihtoehtoja on $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$

54

Alamittaisia on kaloista $213 - 135 = 78$

$$\text{Tapahtuman } A \text{ todennäköisyys } P(A) = \frac{\text{niiden tilastoyksiköiden lukumäärä, joissa } A \text{ tapahtui}}{\text{kaikkien tilastoyksiköiden määrä}}$$

$$P(\text{"alamittainen"}) = \frac{78}{213} = 0,37 \approx 37 \%$$

55

Osumat	Lkm	Luokkakeskus	Luokkakeskus · Lkm
4–5	43	$\frac{4+5}{2} = 4,5$	$43 \cdot 4,5 = 193,5$
2–3	31	2,5	77,5
0–1	8	0,5	4
Yhteensä	82		275

56

$$P(\text{"kuvakortti"}) = \frac{16}{52} \approx 0,31 = 31\%$$

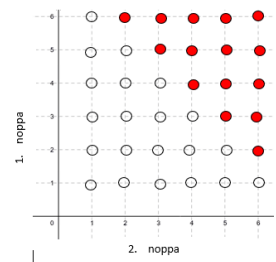
57

Vaihtoehtoja on $6 \cdot 6 = 36$

Suotuisat vaihtoehdot on merkitty kuvaan punaisella, niitä on 15.

Todennäköisyys:

$$P(\text{"summa väh. 8"}) = \frac{15}{36} \approx 0,42 = 42\%$$



58

$$\frac{1}{1000} \cdot 10\,000 \text{ €} + \frac{2}{1000} \cdot 5\,000 \text{ €} = 10 \text{ €} + 10 \text{ €} = 20 \text{ €}$$

59

a) Ohjelmatoimisto voittaa vakuutuksesta 10 % todennäköisyydellä 17 500 euroa ja menettää 90 % todennäköisyydellä 2 500 euroa:

$$0,1 \cdot 17\,500 \text{ €} - 0,9 \cdot 2\,500 \text{ €} = 1\,750 \text{ €} - 2\,250 \text{ €} = -500 \text{ €}$$

b) Sen minkä vakuutuksen ottaja häviää, sen vakuutuksen myöntäjä voittaa. Jos ohjelmatoimiston voiton odotusarvo on –500 €, niin vakuutusyhtiön voiton odotusarvo on 500 €.

60

Selittävä nuolen alkupää ja selitettävä nuolen kohde.

1	Hotellin laatu	→	Hintataso
2	Sukupuoli	ei järkevä	Ikä
3	Henkilökunnan määrä	→	Palvelunopeus
4	Henkilön paino	ei järkevä	Tyytyväisyys palvelun nopeuteen
5	Kosteus-%	→	Homeitiöiden määrä
6	Perheen koko	→	Kuukauden ruokamenot
7	Perheen koko	ei järkevä	Lomapäivät vuodessa
8	Ajotyyli	→	Bensan kulutus
9	Tyytyväisyys työhön	←	Palkka
10	Työpaikkaliikunta	→	Sairauspoissaolot
11	Palkka	→	Veroprosentti
12	Kotitehtävien teko	→	Kurssiarvosana

61

$$\frac{14 \cdot 2 + 9 \cdot 5 + 12 \cdot 3}{14 + 9 + 12} = \frac{109}{35} = 3,11$$

62

- a) 42 % miehistä ei usko elämään Marsissa.
b) Kyllä – vastauksista 60 % oli naisilta.
c) Ei-vastanneiden naisten osuus kaikista vastaajista oli 33 %.

63

Tyytyväisyys	Mies	Nainen	Yhteensä
kiitettävä	648	144	792
hyvä	1 224	126	1 350
tydyttävä	432	468	900
Yhteensä	2 304	738	3 042

Tyytyväisyys	Mies	Nainen	Yhteensä
kiitettävä	28 %	20 %	26 %
hyvä	53 %	17 %	44 %
tydyttävä	19 %	63 %	30 %
Yhteensä	100 %	100 %	100 %

Tyytyväisyys	Mies	Nainen	Yhteensä
kiitettävä	82 %	18 %	100 %
hyvä	91 %	9 %	100 %
tydyttävä	48 %	52 %	100 %
Yhteensä	76 %	24 %	100 %

Tyytyväisyys	Mies	Nainen	Yhteensä
kiitettävä	21 %	5 %	26 %
hyvä	40 %	4 %	44 %
tydyttävä	14 %	15 %	30 %
Yhteensä	76 %	24 %	100 %

Tuloksista nähdään, että tyytymättömyys on naisilla yleisempää. Naisista 63 % arvioi asiakaspalvelun tyydyttävälle tasolle, joka vastaa 15 % kaikista vastanneista. Naisia on kuitenkin vain 24 % vastaajista, joten asiakaskunta on miesvoittoista. Lentoyhtiön kannattaa panostaa erityisesti naisasiakkaiden palveluun, jolloin naisasiakkaiden määräkin voisi kasvaa.

64

Lukumäärät	Parisuhde	Sinkku	Yhteensä
Kyllä	1 530	2 150	3 680
Ei	970	570	1540
Yhteensä	2 500	2 720	5 220

%-osuudet	Parisuhde	Sinkku	Yhteensä
Kyllä	42 %	58 %	100 %
Ei	63 %	37 %	100 %
Yhteensä	48 %	52 %	100 %

Silmämääräisesti tarkasteltuna näyttäisi, että sinkuilla viikoittainen alkoholin käyttö on yleisempää.

65

Jos klaavaa merkitään A ja kruunaa B, niin niiden vaihtoehtoiset yhdistelmät ovat AA, AB, BA ja BB.

Vaihtoehtoon AA eli kaksi klaavaa todennäköisyys on siis $\frac{1}{4}$.

Vaihtoehtoon BB eli kaksi kruunaa todennäköisyys on myös $\frac{1}{4}$.

Sekä klaava että kruuna saadaan vaihtoehtoisissa AB ja BA. Todennäköisyys on siis $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Villen voiton odotusarvo on $\frac{1}{4} \cdot 1 \text{ €} + \frac{1}{4} \cdot 3 \text{ €} - \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ €} = 0,25 \text{ €} + 0,75 \text{ €} - 1 \text{ €} = 0 \text{ €}$.

Emman voiton odotusarvo on $\frac{1}{2} \cdot 2 \text{ €} - \frac{1}{4} \cdot 1 \text{ €} - \frac{1}{4} \cdot 3 \text{ €} = 1 \text{ €} - 0,25 \text{ €} - 0,75 \text{ €} = 0 \text{ €}$.

Vastaus: Peli on reilu, eli jos sitä pelataan tarpeeksi pitkään, kumpikaan ei todennäköisesti jää sen koommin voitolle kuin tappiollekaan.

66

Asiakas siis maksaa kuukauden lämmityksestä 75 % todennäköisyydellä 100 €, 15 % todennäköisyydellä 50 € ja 10 % todennäköisyydellä 150 €.

Odotusarvo saadaan, kun kukin hinnoista kerrotaan omalla todennäköisyydellään ja nämä tulot summataan yhteen:

$$0,75 \cdot 100 \text{ €} + 0,15 \cdot 50 \text{ €} + 0,1 \cdot 150 \text{ €} = 75 \text{ €} + 7,50 \text{ €} + 15 \text{ €} = 97,50 \text{ €}$$

67

$$0,9998x - 0,0002(100\,000 - x) = 0$$

$$0,9998x - 20 \text{ €} + 0,0002x = 0$$

$$0,9998x + 0,0002x = 20 \text{ €}$$

$$x = 20 \text{ €}$$

Vastaus: Vakuutusmaksun vähimmäismäärä on 20 €.

68

$$\text{a) } 5! = 120$$

$$\text{b) } 52! = 8,1 \cdot 10^{67}$$